

शंकु परिच्छेद

इस अध्याय के सभी महत्वपूर्ण प्रश्न – उत्तर सहित। पहले खुद हल करने की कोशिश करो, फिर उत्तर मिलाओ।

अभ्यास प्रश्न-उत्तर (हर टॉपिक से)

» शंकु परिच्छेद का परिचय

प्रश्न 1 (आसान). जब एक समतल शंकु को तिरछे कोण पर काटता है, जिससे वह उसके आधार (base) को नहीं छूता, लेकिन सिर्फ एक नैप (nappe) को काटता है, तो हमें कौन सा शंकु परिच्छेद मिलेगा?

उत्तर – दीर्घवृत्त (Ellipse)

प्रश्न 2 (आसान). कौन सा शंकु परिच्छेद एक 'U-shaped curve' जैसा दिखता है, जैसे गेंद फेंकने पर उसका रास्ता?

उत्तर – परवलय (Parabola)

प्रश्न 3 (मध्यम). यदि एक समतल (plane) एक 'डबल कोन' के दोनों 'nappes' (भागों) को काटता है, तो कौन सा शंकु परिच्छेद बनता है?

उत्तर – अतिपरवलय (Hyperbola)

प्रश्न 4 (कठिन). एक 'plane' एक 'cone' को इस तरह काटता है कि 'plane' और 'cone' की 'generator line' 'parallel' हैं। कौन सा शंकु परिच्छेद प्राप्त होगा?

उत्तर – परवलय (Parabola)

» द्विशंकु की संरचना और शब्दावली

प्रश्न 5 (आसान). शंकु के 'vertex' को हिंदी में क्या कहते हैं?

उत्तर – शीर्ष

प्रश्न 6 (आसान). किस स्थिर रेखा के चारों ओर 'generator' घूमती है?

उत्तर – अक्ष

प्रश्न 7 (मध्यम). यदि 'generator' न घूमे तो क्या 'cone' बन पाएगा?

उत्तर – नहीं, 'generator' के घूमने से ही 'cone' की सतह बनती है।

प्रश्न 8 (कठिन). एक 'double cone' में कितने 'nappe' होते हैं और वे किसके द्वारा अलग होते हैं?

उत्तर – एक 'double cone' में दो 'nappe' होते हैं, और वे 'vertex' द्वारा अलग होते हैं।

» शंकु परिच्छेद के प्रकार (गैर-अपभ्रष्ट)

प्रश्न 9 (आसान). अगर शंकु में 'generator' का कोण $= 30^\circ$ है और 'cutting plane' का कोण $= 90^\circ$ है, तो क्या बनेगा?

उत्तर – वृत्त (Circle)

प्रश्न 10 (आसान). जब 'plane' शंकु के 'generator' के समांतर होता है ($=$), तो कौन सा 'conic section' बनता है?

उत्तर – परवलय (Parabola)

प्रश्न 11 (मध्यम). एक 'cone' का $= 35^\circ$ है। अगर हम इसे $= 20^\circ$ पर काटें, तो कौन सा 'conic section' बनेगा?

उत्तर – अतिपरवलय (Hyperbola), क्योंकि $0 < (0 < 20^\circ < 35^\circ)$ ।

प्रश्न 12 (कठिन). क्या कभी ऐसा हो सकता है कि $\theta = 90^\circ$ हो? अगर हाँ, तो क्या बनेगा?

उत्तर – नहीं, ऐसा नहीं हो सकता। हमेशा 90° से कम होता है, क्योंकि यह 'generator' और 'axis' के बीच का कोण है, जो एक शंकु बनाने के लिए हमेशा नुकीला होता है। अगर 90° होगा, तो शंकु बनेगा ही नहीं, बस एक सीधा 'cylinder' बन जाएगा।

» अपभ्रष्ट शंकु परिच्छेद

प्रश्न 13 (आसान). अगर एक समतल शंकु को उसके शीर्ष (vertex) से काटे और $\theta = 0^\circ$ हो, तो कौन सी आकृति बनेगी?

उत्तर – एक सरल रेखा (A straight line)

प्रश्न 14 (आसान). जब एक 'plane' शंकु के 'vertex' से कटता है, तो 'degenerate conic sections' कितने प्रकार के होते हैं?

उत्तर – तीन प्रकार के (Three types)

प्रश्न 15 (मध्यम). शंकु परिच्छेद कब 'degenerate' कहलाता है? 'When is a conic section called degenerate'?

उत्तर – जब काटने वाला समतल (cutting plane) शंकु के शीर्ष (vertex) से होकर गुजरता है।

प्रश्न 16 (कठिन). किताब के अनुसार, 'जब $0 < \theta < 90^\circ$ ', तो कौन सा 'degenerate conic section' प्राप्त होता है? 'Which degenerate conic section is obtained when $0 < \theta < 90^\circ$ '?

उत्तर – प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं का एक युग्म (A pair of intersecting lines)

» वृत्त की परिभाषा और समीकरण

प्रश्न 17 (आसान). केंद्र (0,0) और त्रिज्या 5 वाले वृत्त का समीकरण क्या है?

उत्तर – $x^2 + y^2 = 25$

प्रश्न 18 (आसान). केंद्र (1,1) और त्रिज्या 2 वाले वृत्त का समीकरण क्या है?

उत्तर – $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

प्रश्न 19 (मध्यम). वृत्त $(x+5)^2 + (y-3)^2 = 36$ का केंद्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर – केंद्र (-5, 3), त्रिज्या 6

प्रश्न 20 (कठिन). बिंदुओं (2,-2) और (3,4) से होकर जाने वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x + y = 2$ पर स्थित है।

उत्तर – $(x - 0.7)^2 + (y - 1.3)^2 = 12.58$

» परवलय की परिभाषा और मुख्य पद

प्रश्न 21 (आसान). परवलय की परिभाषा में, एक बिंदु की दूरी किन दो चीजों से समान होती है?

उत्तर – एक निश्चित सीधी रेखा (नियता) और एक निश्चित बिंदु (नाभि) से।

प्रश्न 22 (आसान). परवलय का अक्ष किस बिंदु से गुजरता है और किस रेखा पर लंब होता है?

उत्तर – यह नाभि से गुजरता है और नियता पर लंब होता है।

प्रश्न 23 (मध्यम). यदि किसी परवलय की नाभि (3,0) और नियता $x = -3$ है, तो परवलय पर स्थित एक बिंदु P(x,y) के लिए कौन सा संबंध सही होगा?

उत्तर – $y^2 = 12x$

प्रश्न 24 (कठिन). एक परवलय का शीर्ष (0,0) है और उसकी नाभि y-अक्ष पर स्थित है। यदि नियता का समीकरण $y = -4$ है, तो नाभि के निर्देशांक क्या होंगे?

उत्तर – (0,4)

» परवलय का मानक समीकरण

प्रश्न 25 (आसान). परवलय $y^2 = 4x$ के लिए 'a' का मान क्या होगा?

उत्तर – $a = 1$

प्रश्न 26 (आसान). परवलय $x^2 = 8y$ किस अक्ष पर खुलेगा?

उत्तर – y-अक्ष पर

प्रश्न 27 (मध्यम). परवलय $y^2 = -16x$ की नाभि के निर्देशांक और नियता का समीकरण बताइए।

उत्तर – नाभि $(-4, 0)$, नियता $x = 4$

प्रश्न 28 (कठिन). उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष $(0,0)$ है और जो बिंदु $(2,3)$ से गुजरता है तथा अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

उत्तर – $y^2 = 9x/2$

» परवलय की नाभिलंब जीवा

प्रश्न 29 (आसान). परवलय $y^2 = 4x$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई क्या है?

उत्तर – 4

प्रश्न 30 (आसान). परवलय $x^2 = 8y$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई क्या है?

उत्तर – 8

प्रश्न 31 (मध्यम). परवलय $y^2 = -16x$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – 16 (लंबाई हमेशा धनात्मक होती है, तो $-16x$ में भी $4a = 16$ ही लेंगे)

प्रश्न 32 (कठिन). यदि एक परवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई 20 है, तो उसके 'standard equation' ' $y^2 = 4ax$ ' में 'a' का मान क्या होगा?

उत्तर – 5

» दीर्घवृत्त की परिभाषा और मुख्य पद

प्रश्न 33 (आसान). दीर्घवृत्त की परिभाषा क्या है? (संक्षेप में)

उत्तर – तल के उन बिंदुओं का समुच्चय जिनकी दो स्थिर बिंदुओं (नाभियाँ) से दूरियों का योग अचर होता है।

प्रश्न 34 (आसान). दीर्घवृत्त में जिन दो स्थिर बिंदुओं से दूरियों का योग अचर होता है, उन्हें क्या कहते हैं?

उत्तर – नाभियाँ (Foci)

प्रश्न 35 (मध्यम). अगर किसी दीर्घवृत्त के लिए दूरियों का अचर योग 12 है, और एक बिंदु (x, y) से नाभियों $(\pm 4, 0)$ की दूरी का योग 12 है, तो यह दीर्घवृत्त की परिभाषा के किस हिस्से को दर्शाता है?

उत्तर – यह दर्शाता है कि नाभियाँ $F_1=(4,0)$ और $F_2=(-4,0)$ हैं, तथा $PF_1+PF_2=12$, जो दीर्घवृत्त की परिभाषा में 'दूरियों का योग अचर' है।

» दीर्घवृत्त के अक्षों और नाभियों के बीच संबंध

प्रश्न 36 (आसान). यदि $a = 10$ और $b = 6$ हो, तो c का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $c = 8$

प्रश्न 37 (आसान). यदि $a = 5$ और $c = 4$ हो, तो b का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $b = 3$

प्रश्न 38 (मध्यम). एक दीर्घवृत्त में, दीर्घ अक्ष की लंबाई 20 इकाई और लघु अक्ष की लंबाई 16 इकाई है। केंद्र से नाभि की दूरी ज्ञात करें।

उत्तर – $a = 10, b = 8, c = 6$

प्रश्न 39 (कठिन). एक दीर्घवृत्त के शीर्ष $(\pm 13, 0)$ पर हैं और नाभियाँ $(\pm 5, 0)$ पर हैं। इस दीर्घवृत्त के अर्ध-लघु अक्ष की लंबाई ज्ञात करें।

उत्तर – $a = 13, c = 5, b = 12$

» दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता

प्रश्न 40 (आसान). अगर $c = 3$ और $a = 6$ है, तो उत्केन्द्रता (e) क्या होगी?

उत्तर – $e = 3/6 = 0.5$

प्रश्न 41 (आसान). दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता 0.7 है। अगर $a = 10$ है, तो c का मान क्या होगा?

उत्तर – $c = e * a = 0.7 * 10 = 7$

प्रश्न 42 (मध्यम). एक दीर्घवृत्त में, दीर्घ अक्ष की लंबाई 20 इकाई है और केंद्र से नाभि की दूरी 6 इकाई है। उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

उत्तर – दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 20$, तो $a = 10$. नाभि की दूरी $= c = 6$. उत्केन्द्रता $e = c/a = 6/10 = 0.6$.

प्रश्न 43 (कठिन). एक दीर्घवृत्त का समीकरण $x^2/100 + y^2/64 = 1$ है। इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

उत्तर – यहाँ $a^2 = 100$, तो $a = 10$. $b^2 = 64$, तो $b = 8$. सूत्र $a^2 = b^2 + c^2$ का उपयोग करके, $c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 64 = 36$, तो $c = 6$. अब उत्केन्द्रता $e = c/a = 6/10 = 0.6$.

» दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

प्रश्न 44 (आसान). अगर दीर्घवृत्त का मानक समीकरण $x^2/16 + y^2/9 = 1$ है, तो इसका दीर्घ अक्ष किस अक्ष के अनुदिश होगा?

उत्तर – x -अक्ष के अनुदिश (क्योंकि $16 > 9$)

प्रश्न 45 (आसान). यदि एक दीर्घवृत्त का मानक समीकरण $x^2/25 + y^2/36 = 1$ है, तो a^2 का मान क्या होगा?

उत्तर – 36 (क्योंकि दीर्घ अक्ष y -अक्ष पर है और a हमेशा बड़ा हर होता है)

प्रश्न 46 (मध्यम). दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm 3)$ और शीर्ष $(0, \pm 5)$ हैं।

उत्तर – $x^2/16 + y^2/25 = 1$

प्रश्न 47 (कठिन). उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करें जिसके दीर्घ अक्ष की लंबाई 10 है और नाभियाँ $(\pm 4, 0)$ हैं।

उत्तर – $x^2/25 + y^2/9 = 1$

» दीर्घवृत्त की नाभिलंब जीवा

प्रश्न 48 (आसान). दीर्घवृत्त $x^2/16 + y^2/4 = 1$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई बताओ।

उत्तर – $2b^2/a = 2*4/4 = 2$ इकाई

प्रश्न 49 (आसान). यदि $a = 5$ और $b = 2$ है, तो नाभिलंब जीवा की लंबाई क्या होगी?

उत्तर – $2b^2/a = 2*(2^2)/5 = 8/5$ इकाई

प्रश्न 50 (मध्यम). दीर्घवृत्त $9x^2 + 4y^2 = 36$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – समीकरण को $x^2/4 + y^2/9 = 1$ में बदलेंगे। यहाँ $a=3, b=2$ (y^2 के नीचे बड़ा हर है, तो $a^2=9$)। तो लंबाई $2b^2/a = 2*(2^2)/3 = 8/3$ इकाई।

» अतिपरवलय की परिभाषा और मुख्य पद

प्रश्न 51 (आसान). अतिपरवलय में दो स्थिर बिंदुओं को क्या कहते हैं?

उत्तर – नाभियाँ (Foci)

प्रश्न 52 (आसान). नाभियों को मिलाने वाले रेखाखंड के मध्य बिंदु को क्या कहते हैं?

उत्तर – अतिपरवलय का केंद्र (Center)

प्रश्न 53 (मध्यम). अतिपरवलय की परिभाषा में दूरियों का क्या अचर होता है - योग या अंतर?

उत्तर – अंतर

प्रश्न 54 (कठिन). अनुप्रस्थ अक्ष और संयुग्मी अक्ष में क्या संबंध होता है?

उत्तर – संयुग्मी अक्ष, अनुप्रस्थ अक्ष पर लंबवत होता है और केंद्र से गुजरता है।

» अतिपरवलय की उत्केन्द्रता

प्रश्न 55 (आसान). यदि अतिपरवलय की नाभि केंद्र से 6 इकाई दूर है और शीर्ष केंद्र से 4 इकाई दूर है, तो उत्केन्द्रता क्या होगी?

उत्तर – $e = 6/4 = 3/2$

प्रश्न 56 (आसान). क्या अतिपरवलय की उत्केन्द्रता 0.5 हो सकती है?

उत्तर – नहीं, क्योंकि अतिपरवलय के लिए उत्केन्द्रता हमेशा 1 से ज़्यादा होती है।

प्रश्न 57 (मध्यम). एक अतिपरवलय में $a = 7$ और $c = 10$ है। इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए और बताइए कि यह अतिपरवलय क्यों है?

उत्तर – $e = c/a = 10/7$ । यह अतिपरवलय इसलिए है क्योंकि $e > 1$ है।

प्रश्न 58 (कठिन). एक अतिपरवलय के लिए, केंद्र से नाभि की दूरी (c) और केंद्र से शीर्ष की दूरी (a) के बीच क्या संबंध होता है?

उत्तर – अतिपरवलय के लिए, c हमेशा a से बड़ा होता है ($c > a$)।

» अतिपरवलय का मानक समीकरण

प्रश्न 59 (आसान). अतिपरवलय ' $x^2/25 - y^2/9 = 1$ ' के लिए 'a' और 'b' का मान क्या है?

उत्तर – $a = 5, b = 3$

प्रश्न 60 (आसान). किस प्रकार के मानक समीकरण में अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष के अनुदिश होता है?

उत्तर – $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$

प्रश्न 61 (मध्यम). अतिपरवलय ' $4y^2 - 9x^2 = 36$ ' को मानक रूप में लिखकर उसके 'a' और 'b' का मान ज्ञात करें।

उत्तर – $y^2/9 - x^2/4 = 1$; $a = 3, b = 2$

प्रश्न 62 (कठिन). अतिपरवलय ' $y^2/16 - x^2/9 = 1$ ' के लिए शीर्षों के निर्देशांक, नाभियों के निर्देशांक और उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

उत्तर – शीर्ष: $(0, \pm 4)$, नाभियाँ: $(0, \pm 5)$, उत्केन्द्रता: $5/4$

» अतिपरवलय की नाभिलंब जीवा

प्रश्न 63 (आसान). अतिपरवलय $x^2/4 - y^2/9 = 1$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई क्या है?

उत्तर – $2b^2/a = 2 * 9 / 2 = 9$

प्रश्न 64 (आसान). यदि किसी अतिपरवलय में $a=5$ और $b=2$ है, तो नाभिलंब जीवा की लंबाई क्या होगी?

उत्तर – $2b^2/a = 2 * 4 / 5 = 8/5$

प्रश्न 65 (मध्यम). अतिपरवलय $9y^2 - 4x^2 = 36$ की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर – पहले समीकरण को मानक रूप में बदलें: $y^2/4 - x^2/9 = 1$ । तो $a=2$, $b=3$ । लंबाई $= 2b^2/a = 2 * 9 / 2 = 9$ ।

प्रश्न 66 (कठिन). एक अतिपरवलय की नाभियाँ $(0, \pm 5)$ पर हैं और नाभिलंब जीवा की लंबाई 3.2 है। अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए।

उत्तर – नाभियाँ $(0, \pm 5)$ मतलब $c=5$ और अनुप्रस्थ अक्ष y -अक्ष पर है। नाभिलंब जीवा की लंबाई $2b^2/a = 3.2$ । हमें पता है $c^2=a^2+b^2$, तो $25=a^2+b^2$ । अब $2b^2=3.2a$ । यहाँ से b^2 का मान निकाल कर c^2 वाले समीकरण में रखने पर $a=4$ और $b=3$ मिलेगा। समीकरण होगा $y^2/16 - x^2/9 = 1$ ।

हल किए हुए उदाहरण (step-by-step)

उदाहरण 1. एक लंब वृत्तीय द्विशंकु (Double Cone) को एक समतल (Plane) द्वारा इस प्रकार काटा जाता है कि समतल शंकु के आधार (base) के समानांतर (parallel) है, लेकिन शीर्ष (vertex) से नहीं गुजरता। हमें कौन सा शंकु परिच्छेद प्राप्त होगा?

- › यहाँ हमें दिया गया है कि 'plane' एक 'right circular double cone' को काट रहा है।
- › यह भी बताया गया है कि 'plane' 'cone' के 'base' के 'parallel' है।
- › जब एक समतल शंकु के आधार के समानांतर होता है और शीर्ष से नहीं गुजरता, तो वह एक 'circle' बनाता है।
- › आप ऐसे समझो जैसे एक गोल केक को बिल्कुल सीधा-सीधा काटा जाए, तो जो 'slice' निकलेगी, वो गोल ही होगी।

उत्तर – हमें एक वृत्त (Circle) प्राप्त होगा।

उदाहरण 2. एक लंब वृत्तीय द्विशंकु (right circular double cone) की संरचना के मुख्य अवयवों को पहचानें और उनकी भूमिका बताएं।

- › पहला, हमें यह समझना होगा कि 'द्विशंकु' कैसे बनता है। यह एक 'generator' नामक रेखा के एक 'fixed line' यानी 'axis' के चारों ओर घूमने से बनता है।
- › दूसरा, 'generator' वो रेखा है जो 'axis' के साथ एक निश्चित कोण 'alpha' पर घूमती है और शंकु की सतह बनाती है।
- › तीसरा, 'axis' वो स्थिर रेखा है जिसके चारों ओर 'generator' घूमती है। यह शंकु के केंद्र से होकर गुजरती है।
- › चौथा, 'vertex' वो स्थिर बिंदु होता है जहाँ 'generator' हमेशा 'axis' को काटती है। यह द्विशंकु को दो हिस्सों में बांटता है।

- › पांचवां, 'nappe' शीर्ष द्वारा बनाए गए शंकु के दो भाग होते हैं। एक 'nappe' ऊपर होता है और दूसरा नीचे।

उत्तर – द्विशंकु के मुख्य अवयव 'अक्ष', 'शीर्ष', 'जनक', और 'नापे' हैं। 'अक्ष' स्थिर केंद्र रेखा है, 'शीर्ष' केंद्रीय बिंदु है, 'जनक' घूमने वाली रेखा है जो शंकु बनाती है, और 'नापे' शंकु के दो हिस्से हैं।

उदाहरण 3. मान लीजिए एक 'right circular double cone' है, और 'generator' रेखा 'axis' के साथ 45 डिग्री का कोण ($= 45^\circ$) बनाती है। अगर हम इस शंकु को एक 'plane' से काटते हैं जो 'axis' के साथ 60 डिग्री का कोण ($= 60^\circ$) बनाता है, तो कौन सा 'conic section' बनेगा?

- › सबसे पहले, हमें 'generator' और 'axis' के बीच का कोण (θ) देखना है, जो कि 45° है।
- › फिर, हमें 'cutting plane' और 'axis' के बीच का कोण (ϕ) देखना है, जो कि 60° है।
- › अब हम इनकी तुलना करेंगे। यहाँ $\theta = 45^\circ$ और $\phi = 60^\circ$ ।
- › हम देख सकते हैं कि $\theta < \phi$ है ($45^\circ < 60^\circ$)।
- › साथ ही, 90° से कम है ($60^\circ < 90^\circ$)।
- › तो, हमारी शर्त बनती है $\theta < \phi < 90^\circ$ ।

उत्तर – इस स्थिति में हमें एक दीर्घवृत्त (Ellipse) मिलेगा।

उदाहरण 4. यह शंकु परिच्छेद किस प्रकार का है जब काटने वाला समतल, शंकु के शीर्ष (vertex) से होकर जाता है और $> 90^\circ$ है?

› यहाँ हमें 'cutting plane' और 'axis' के बीच का कोण () और 'generator' और 'axis' के बीच का कोण () दिया गया है।

› पहला 'case' है: 'जब $> 90^\circ$ '। मतलब, कोण 90° से कम या बराबर है, और से भी छोटा है।

› इस 'condition' में, किताब कहती है, 'तो परिच्छेद एक बिंदु है'।

› यानी, 'the intersection is a point'। समतल शंकु को केवल एक ही जगह पर छुएगा - उसके शीर्ष पर।

उत्तर – एक बिंदु (Point)

उदाहरण 5. एक वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र $(-2, 3)$ है और त्रिज्या 4 इकाई है।

› यहाँ केंद्र $(h, k) = (-2, 3)$ है, तो $h = -2$ और $k = 3$ है।

› त्रिज्या $(r) = 4$ इकाई है।

› वृत्त का मानक समीकरण होता है: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ।

› अब इसमें मान रखने पर: $(x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

› इसे हल करने पर: $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$

उत्तर – वृत्त का समीकरण $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$ है।

उदाहरण 6. मान लीजिए एक परवलय की नाभि (Focus) $F(2,0)$ है और नियता (Directrix) $x = -2$ है। परवलय पर एक बिंदु $P(x,y)$ लीजिए। परवलय की परिभाषा का उपयोग करके बिंदु P के लिए संबंध ज्ञात कीजिए।

› पहला कदम, हम नाभि $F(2,0)$ से बिंदु $P(x,y)$ की दूरी निकालेंगे, जिसे हम 'PF' कहेंगे। दूरी सूत्र से, $PF = [(x-2)^2 + (y-0)^2] = [(x-2)^2 + y^2]$ होगा।

› दूसरा कदम, अब हम बिंदु $P(x,y)$ से नियता $x = -2$ की दूरी निकालेंगे, जिसे हम 'PM' कहेंगे। नियता $x = -2$ का मतलब है $x + 2 = 0$ । तो एक बिंदु से रेखा की दूरी का सूत्र याद है? $PM = |Ax + By + C| / (A^2 + B^2)$ । यहाँ $A=1$, $B=0$, $C=2$ है, तो $PM = |x + 2| / (1^2 + 0^2) = |x + 2|$ ।

› तीसरा कदम, परवलय की परिभाषा के अनुसार, $PF = PM$ होना चाहिए। तो हम लिखेंगे: $[(x-2)^2 + y^2] = |x + 2|$ ।

› चौथा कदम, दोनों तरफ वर्ग करने पर: $(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2$ ।

› पाँचवाँ कदम, इसे हल करने पर: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4$ ।

› आखिर में, x^2 और 4 दोनों कट जाएँगे, और $-4x$ को दूसरी तरफ ले जाने पर हमें मिलेगा: $y^2 = 8x$ । यह परवलय का समीकरण है। देखा, कैसे परिभाषा का इस्तेमाल करके हम समीकरण तक पहुँच गए!

› नाभि (Focus): 'The fixed point F' जिसे हम नाभि कहते हैं। यही वो बिंदु है जहाँ से परवलय के हर बिंदु की दूरी नियता से बराबर होती है।

› नियता (Directrix): 'The fixed straight line' जिसे हम नियता कहते हैं। यह वो सीधी रेखा है जहाँ से परवलय के हर बिंदु की दूरी नाभि से बराबर होती है।

› अक्ष (Axis): 'The line passing through the focus and perpendicular to the directrix' – मतलब नाभि से गुजरने वाली और नियता पर लंबवत रेखा। यह रेखा परवलय को दो बराबर हिस्सों में बांटती है, जैसे हम किसी सेब को बीच से काटते हैं।

› शीर्ष (Vertex): 'The point where the parabola intersects its axis' – जिस बिंदु पर परवलय अपने अक्ष को काटता है, उसे हम शीर्ष कहते हैं। यह परवलय पर वो बिंदु होता है जो नाभि और नियता से सबसे पास और बराबर दूरी पर होता है।

उत्तर – परवलय का समीकरण $y^2 = 8x$ है।

उदाहरण 7. समीकरण $y^2 = 12x$ वाले परवलय की नाभि के निर्देशांक, अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, हमें दिए गए समीकरण ' $y^2 = 12x$ ' को देखना है।
- › यह 'standard form $y^2 = 4ax$ ' जैसा दिख रहा है। इसका मतलब है कि परवलय 'x-axis' के 'symmetric' है और 'right side' में खुल रहा है।
- › अब, हम ' $12x$ ' को ' $4ax$ ' से तुलना करेंगे। तो ' $4a = 12$ ' होगा।
- › इससे हमें ' a ' का मान मिलेगा: ' $a = 12/4 = 3$ '।
- › नाभि के निर्देशांक ' $F(a, 0)$ ' होते हैं, तो यह ' $F(3, 0)$ ' होगा।
- › परवलय का अक्ष 'x-axis' है।
- › नियता का समीकरण ' $x = -a$ ' होता है, तो यह ' $x = -3$ ' होगा।
- › नाभिलंब जीवा की लंबाई ' $4a$ ' होती है, तो यह ' $4 \times 3 = 12$ ' होगी।

उत्तर – नाभि के निर्देशांक (3, 0) हैं, अक्ष x-अक्ष है, नियता का समीकरण $x = -3$ है, और नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 इकाई है।

उदाहरण 8. परवलय $y^2 = 12x$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

- › पहला कदम है कि दिए गए समीकरण ' $y^2 = 12x$ ' की तुलना हम 'standard equation $y^2 = 4ax$ ' से करेंगे।
- › तुलना करने पर, हम देखते हैं कि ' $4a = 12$ ' है।
- › अब हमें ' a ' का मान निकालना है, तो ' $a = 12 / 4$ ' हो जाएगा।
- › इसका मतलब है ' $a = 3$ '।
- › और हमें पता है कि नाभिलंब जीवा की लंबाई ' $4a$ ' होती है।
- › तो हम ' $4a$ ' में ' a ' का मान रखेंगे: ' 4×3 '।

उत्तर – इसलिए, परवलय $y^2 = 12x$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई 12 होगी।

उदाहरण 9. यदि किसी दीर्घवृत्त की नाभियाँ $(\pm 3, 0)$ पर हैं और किसी बिंदु (x, y) से इन नाभियों की दूरियों का योग हमेशा 10 रहता है, तो दीर्घवृत्त की परिभाषा से इस बिंदु का बिंदुपथ (लोकस) क्या होगा?

- › हमें दिया गया है कि नाभियाँ $F_1 = (3, 0)$ और $F_2 = (-3, 0)$ हैं।
- › दीर्घवृत्त की परिभाषा के अनुसार, किसी भी बिंदु $P(x, y)$ के लिए, $PF_1 + PF_2 = \text{अचर}$ ।
- › यहाँ अचर का मान 10 दिया गया है, यानी $PF_1 + PF_2 = 10$ ।
- › PF_1 को दूरी सूत्र से ज्ञात करेंगे: $((x-3)^2 + (y-0)^2)$
- › PF_2 को दूरी सूत्र से ज्ञात करेंगे: $((x-(-3))^2 + (y-0)^2) = ((x+3)^2 + y^2)$
- › तो, $((x-3)^2 + y^2) + ((x+3)^2 + y^2) = 10$ ।
- › इस समीकरण को हल करने के लिए, एक पद को दाईं ओर ले जाकर वर्ग करते हैं, फिर दोबारा वर्ग करते हैं।
- › सरल करने पर, हमें $x^2/25 + y^2/16 = 1$ का समीकरण मिलेगा।

उत्तर – दीर्घवृत्त का समीकरण $x^2/25 + y^2/16 = 1$ होगा।

उदाहरण 10. एक दीर्घवृत्त का अर्ध-दीर्घ अक्ष 13 इकाई है और अर्ध-लघु अक्ष 5 इकाई है। इसकी नाभियों की केंद्र से दूरी ज्ञात कीजिए।

- › हमें दिया गया है: अर्ध-दीर्घ अक्ष $(a) = 13$ इकाई।
- › अर्ध-लघु अक्ष $(b) = 5$ इकाई।
- › हमें केंद्र से नाभि की दूरी (c) ज्ञात करनी है।
- › सूत्र ' $a^2 = b^2 + c^2$ ' का उपयोग करने पर:
- › $13^2 = 5^2 + c^2$
- › $169 = 25 + c^2$
- › $c^2 = 169 - 25$
- › $c^2 = 144$
- › $c = 144$

$$c = 12$$

उत्तर – केंद्र से नाभि की दूरी 12 इकाई है।

उदाहरण 11. एक दीर्घवृत्त में केंद्र से नाभि की दूरी (c) 4 इकाई है और केंद्र से शीर्ष की दूरी (a) 5 इकाई है। इसकी उत्केन्द्रता (e) ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, हम उत्केन्द्रता का सूत्र लिखेंगे: $e = c/a$.
- › हमें दिया गया है कि $c = 4$ इकाई और $a = 5$ इकाई।
- › अब, इन मानों को सूत्र में रखेंगे: $e = 4/5$.
- › इसे दशमलव में बदलेंगे तो $e = 0.8$.
- › जैसा कि हमने सीखा, उत्केन्द्रता हमेशा 0 और 1 के बीच होती है, और हमारा उत्तर 0.8 है, जो इस शर्त को पूरा करता है।

उत्तर – दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता (e) = 0.8 है।

उदाहरण 12. दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियां $(\pm 4, 0)$ हैं और शीर्ष $(\pm 5, 0)$ हैं।

› यहाँ नाभियां 'foci are on x-axis' यानी x-अक्ष पर हैं $(\pm c, 0)$ और शीर्ष भी x-अक्ष पर हैं $(\pm a, 0)$ । इससे हमें पता चलता है कि दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है।

› दीर्घवृत्त का 'major axis is along x-axis' यानी दीर्घ अक्ष x-अक्ष के अनुदिश है, तो मानक समीकरण $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ होगा।

- › नाभियां $(\pm 4, 0)$ दी गई हैं, तो $c = 4$ ।
- › शीर्ष $(\pm 5, 0)$ दिए गए हैं, तो $a = 5$ ।
- › हम जानते हैं कि $c^2 = a^2 - b^2$ । इस सूत्र में मान रखने पर: $4^2 = 5^2 - b^2$ ।
- › $16 = 25 - b^2$ ।
- › $b^2 = 25 - 16 = 9$ ।
- › अब $a^2 = 5^2 = 25$ और $b^2 = 9$ को मानक समीकरण में रखेंगे।
- › इसलिए, समीकरण होगा: $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ।

उत्तर – दीर्घवृत्त का समीकरण $x^2/25 + y^2/9 = 1$ है।

उदाहरण 13. दीर्घवृत्त $x^2/25 + y^2/9 = 1$ के लिए नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, दिए गए समीकरण ' $x^2/25 + y^2/9 = 1$ ' की तुलना मानक समीकरण ' $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ ' से करेंगे।
- › इससे हमें ' $a^2 = 25$ ' मिलेगा, तो ' $a = 5$ ' हो गया।
- › और ' $b^2 = 9$ ' मिलेगा, तो ' $b = 3$ ' हो गया।
- › नाभिलंब जीवा की लंबाई का सूत्र ' $2b^2/a$ ' होता है।
- › अब इस सूत्र में ' a ' और ' b^2 ' के मान रखेंगे: ' $2 * 9 / 5$ '।
- › तो लंबाई ' $18/5$ ' या ' 3.6 ' इकाई होगी।

उत्तर – नाभिलंब जीवा की लंबाई = $18/5$ इकाई।

उदाहरण 14. मान लीजिए एक अतिपरवलय की दो नाभियाँ $F_1(-5,0)$ और $F_2(5,0)$ हैं, और इस अतिपरवलय पर एक बिंदु $P(x,y)$ है। यदि PF_1 और PF_2 के बीच का अंतर 6 इकाई है, तो अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार आप क्या कहेंगे?

› अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार, किसी भी बिंदु P से दोनों नाभियों (F_1 और F_2) की दूरियों का अंतर अचर रहता है।

- › यहाँ नाभियाँ $F_1(-5,0)$ और $F_2(5,0)$ हैं।
- › दूरी का अंतर 6 इकाई दिया गया है।
- › तो, हम लिखेंगे $|PF_1 - PF_2| = 6$ ।
- › यह अचर ' $2a$ ' के बराबर होता है, इसलिए $2a = 6$, जिसका अर्थ है $a = 3$ ।

उत्तर – अतिपरवलय की परिभाषा के अनुसार, किसी भी बिंदु $P(x,y)$ के लिए $|PF_1 - PF_2| = 6$ होगा, और इस अतिपरवलय के लिए ' a ' का मान 3 है।

उदाहरण 15. एक अतिपरवलय का केंद्र मूल बिंदु (0,0) पर है। इसकी नाभियाँ $(\pm 8, 0)$ पर हैं और शीर्ष $(\pm 5, 0)$ पर हैं। इस अतिपरवलय की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

- › नाभियों के निर्देशांक से हमें 'c' का मान मिलता है। यहाँ नाभियाँ $(\pm 8, 0)$ हैं, तो $c = 8$ ।
- › शीर्षों के निर्देशांक से हमें 'a' का मान मिलता है। यहाँ शीर्ष $(\pm 5, 0)$ हैं, तो $a = 5$ ।
- › उत्केन्द्रता (e) का सूत्र $e = c/a$ होता है।
- › सूत्र में मान रखने पर: $e = 8/5$ ।

उत्तर – अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $e = 8/5$ है।

उदाहरण 16. अतिपरवलय ' $16x^2 - 9y^2 = 144$ ' के शीर्षों और नाभियों के निर्देशांक, उत्केन्द्रता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

- › पहले दिए गए समीकरण को मानक रूप में बदलेंगे। ' $16x^2 - 9y^2 = 144$ ' को 144 से भाग देने पर हमें मिलता है: ' $x^2/9 - y^2/16 = 1$ ' (हर एक पद को 144 से भाग दिया)।
- › इसकी तुलना ' $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ' से करने पर, हमें ' $a^2 = 9$ ' मिलता है, यानी ' $a = 3$ '। और ' $b^2 = 16$ ' मिलता है, यानी ' $b = 4$ ' (क्योंकि 'a' और 'b' दूरियाँ हैं, इसलिए धनात्मक मान लेते हैं)।
- › अब 'c' निकालेंगे। हमें पता है ' $c^2 = a^2 + b^2$ ' अतिपरवलय के लिए। तो, ' $c^2 = 9 + 16 = 25$ ', इसका मतलब ' $c = 5$ ' है।
- › शीर्षों के निर्देशांक ' $\pm(a, 0)$ ' होते हैं, तो वे ' $\pm(3, 0)$ ' हैं।
- › नाभियों के निर्देशांक ' $\pm(c, 0)$ ' होते हैं, तो वे ' $\pm(5, 0)$ ' हैं।
- › उत्केन्द्रता ' $e = c/a$ ' होती है, तो ' $e = 5/3$ ' है।
- › नाभिलंब जीवा की लंबाई ' $2b^2/a$ ' होती है, तो ' $2 * 16 / 3 = 32/3$ ' है।

उत्तर – शीर्ष: $(\pm 3, 0)$, नाभियाँ: $(\pm 5, 0)$, उत्केन्द्रता: $5/3$, नाभिलंब जीवा की लंबाई: $32/3$ ।

उदाहरण 17. अतिपरवलय ' $x^2/9 - y^2/16 = 1$ ' की नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

- › सबसे पहले, दिए गए समीकरण ' $x^2/9 - y^2/16 = 1$ ' की तुलना मानक समीकरण ' $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ ' से करें।
- › तुलना करने पर हमें मिलता है: $a^2 = 9$, तो $a = 3$ । और $b^2 = 16$, तो $b = 4$ ।
- › अब नाभिलंब जीवा की लंबाई का सूत्र लगाएं: 'नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 2b^2/a$ '।
- › सूत्र में a और b के मान रखने पर: $2 * (16) / 3$
- › गणना करने पर: $32/3$ ।

उत्तर – अतिपरवलय की नाभिलंब जीवा की लंबाई $32/3$ है।

बोर्ड परीक्षा के लिए खास

- शंकु परिच्छेदों के अलग-अलग प्रकारों को याद रखना और यह समझना कि वे किस तरह के 'कट' से बनते हैं, परीक्षा में सीधे सवाल बन सकते हैं। इन 'geometric shapes' के 'characteristics' को ध्यान से समझना।
- शंकु के मुख्य अवयवों, विशेषकर 'axis', 'vertex', और 'generator' की परिभाषाएँ और भूमिकाएँ बोर्ड परीक्षा के लिए महत्वपूर्ण हैं। इन्हें अच्छे से समझ लेना।
- शंकु परिच्छेद के प्रकारों को याद रखना बहुत ज़रूरी है। " और " के बीच के संबंध को ध्यान से समझ लेना, इस पर सीधे सवाल बोर्ड परीक्षा में आते हैं। उदाहरण के तौर पर, 'जब $=$, तो परिच्छेद एक परवलय होता है'—ऐसे कथन 'one-mark' वाले प्रश्नों में आ सकते हैं।
- यह अवधारणा सीधे बड़े प्रश्न के रूप में नहीं आती, लेकिन 'multiple choice questions' या 'fill in the blanks' में इसके 'conditions' पूछे जा सकते हैं।
- यह अवधारणा बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। अक्सर केंद्र और त्रिज्या दिए होने पर समीकरण निकालना या समीकरण से केंद्र और त्रिज्या निकालना, दोनों तरह के प्रश्न आते हैं। समीकरण को पूर्ण वर्ग बनाकर हल करने वाले प्रश्नों पर विशेष ध्यान दें।

- परवलय की परिभाषा और उसके मुख्य पदों (नाभि, नियता, अक्ष, शीर्ष) की सही समझ बोर्ड परीक्षा में समीकरणों को हल करने और ग्राफ बनाने के लिए बहुत ज़रूरी है। अक्सर 2-3 नंबर के सीधे प्रश्न इन्हीं पर आते हैं।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है! 'Standard equations' को पहचानना और उनसे नाभि, नियता, अक्ष और नाभिलंब जीवा की लंबाई निकालना अक्सर सीधे-सीधे प्रश्न के रूप में आता है।
- यह टॉपिक बोर्ड परीक्षाओं के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। 'नाभिलंब जीवा' की लंबाई निकालने के प्रश्न सीधे आते हैं, इसलिए '4a' वाला सूत्र हमेशा याद रखना और 'a' का मान सही से पहचानना सीखो।
- दीर्घवृत्त की परिभाषा और इसके मुख्य पदों को अच्छे से समझना बहुत ज़रूरी है, क्योंकि परीक्षा में परिभाषा से जुड़े प्रश्न या पदों की पहचान करने वाले सवाल अक्सर आते हैं। दीर्घ अक्ष और लघु अक्ष के बीच का अंतर याद रखना।
- यह सूत्र ' $a^2 = b^2 + c^2$ ' बोर्ड परीक्षा के लिए बहुत महत्वपूर्ण है। इस पर आधारित सीधे प्रश्न या बड़े प्रश्नों के हिस्से के रूप में प्रश्न ज़रूर आते हैं। इसे अच्छे से समझकर याद रखें।
- उत्केन्द्रता पर आधारित सीधे सूत्र के प्रश्न अक्सर पूछे जाते हैं, इसलिए ' $e = c/a$ ' और ' $a^2 = b^2 + c^2$ ' के संबंध को अच्छे से समझना बहुत ज़रूरी है।
- बोर्ड परीक्षा में, 'finding the equation of an ellipse' यानी दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करने वाले प्रश्न बहुत आते हैं। 'identify major axis correctly' यानी दीर्घ अक्ष को सही पहचानना और ' $c^2 = a^2 - b^2$ ' सूत्र का सही उपयोग करना ही 'key to scoring full marks' यानी पूरे अंक प्राप्त करने की कुंजी है।
- यह सूत्र ' $2b^2/a$ ' बोर्ड परीक्षा में सीधे तौर पर पूछा जाता है या फिर किसी बड़े प्रश्न का हिस्सा होता है, जहाँ आपको 'a' और 'b' का मान निकालकर इसकी लंबाई बतानी होती है।
- यह परिभाषा सीधे-सीधे 'One-mark' के प्रश्न में आ सकती है। सभी मुख्य पदों को ध्यान से याद कर लेना!
- उत्केन्द्रता (e) का मान और ' $e > 1$ ' वाली शर्त को याद रखना बहुत ज़रूरी है। समीकरण वाले सवालों में इसकी सीधी एप्लीकेशन आती है।
- बोर्ड परीक्षा में, आपको अक्सर दिए गए समीकरण से अतिपरवलय की सभी विशेषताएँ (शीर्ष, नाभि, उत्केन्द्रता, नाभिलंब जीवा) निकालने को कहा जाएगा, या फिर विशेषताओं से समीकरण बनाना होगा। इसलिए, इन दोनों मानक समीकरणों को अच्छे से समझना और याद रखना बहुत ज़रूरी है।

एक नज़र में रिवीज़न

- › शंकु परिच्छेद: शंकु को समतल से काटने पर बने वक्र (वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय)।
- › द्विशंकु के अवयव: अक्ष (axis), शीर्ष (vertex), जनक (generator), नापे (nappe)।
- › तल द्वारा शंकु को विभिन्न कोणों पर काटने से वृत्त, दीर्घवृत्त, परवलय, अतिपरवलय बनते हैं।
- › शंकु शीर्ष से कटा तो: बिंदु, रेखा, प्रतिच्छेदी रेखा युग्म बनते हैं।
- › वृत्त = स्थिर बिंदु (केंद्र) से समान दूरी (त्रिज्या) पर बिंदुओं का समुच्चय। समीकरण: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ।
- › परवलय: नाभि और नियता से समान दूरी पर बिंदुओं का समुच्चय।
- › चार मानक समीकरण: $y^2 = \pm 4ax$, $x^2 = \pm 4ay$; दिशा 'a' पर निर्भर।
- › नाभिलंब जीवा: नाभि से अक्ष के लंबवत; लंबाई 4a.
- › दीर्घवृत्त: दो नाभियों से दूरियों का योग अचर। मुख्य पद: केंद्र, शीर्ष, दीर्घ/लघु अक्ष।
- › $a^2 = b^2 + c^2$ दीर्घवृत्त के अक्षों और नाभियों के बीच संबंध।
- › उत्केन्द्रता (e) = c/a ; बताता है दीर्घवृत्त का चपटापन; $0 < e < 1$.
- › मानक दीर्घवृत्त समीकरण: $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ या $x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$ ($a > b$)
- › नाभिलंब जीवा: नाभि से लंबवत गुजरने वाली जीवा; लंबाई = $2b^2/a$
- › अतिपरवलय: नाभियों से दूरियों का अंतर अचर। अनुप्रस्थ अक्ष, संयुग्मी अक्ष, शीर्ष।

- › $e = c/a$; अतःपरिवलय के लिए $e > 1$
- › दो मानक समीकरण: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ और $y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$ ।